Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ján Vagaský

Modely celočíselných časových řad

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2014

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať vedúcej mojej bakalárskej práce, pani doc. RNDr. Zuzane Práškovej, CSc., za jej cenné rady a trpezlivé usmerňovanie môjho snaženia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Ján Vagaský

Název práce: Modely celočíselných časových řad

Autor: Ján Vagaský

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc, Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci jsou studovány modely celočíselných náhodných řad založené na náhodných součtech náhodných veličin. Jsou zde popsány základní vlastnosti jednoduchého procesu větvení, procesu INAR(1) a binomického autoregresního procesu prvního řádu. U každého z těchto modelů je dokázána markovská vlastnost a určeny podmínky, za kterých jde o slabě stacionární proces. V případě procesu INAR(1) a binomického AR(1) procesu jsou v této práci spočítány momenty a kumulanty do čtvrtého řádu s využitím vytvářejících funkcí náhodných veličin.

Klíčová slova: náhodné součty náhodných veličin, momenty, kumulanty, operátor binomického ředění

Title: Models of integer-valued time series

Author: Ján Vagaský

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this thesis models of integer-valued time series based on random sums of random variables are studied. We describe basic properties of a simple branching process, an INAR(1) process and a first-order binomial autoregresive process. We prove the Markov property of each of these processes and study conditions required for the processes to be weak-stationary. Using generating functions of random variables we derive moments and cumulants up to the fourth order for INAR(1) process and binomial AR(1) process.

Keywords: random sums of random variables, moments, cumulants, binomial thinning operator

Názov práce: Modely celočíselných časových radov

Autor: Ján Vagaský

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V tejto práci sú skúmané modely celočíselných náhodných radov založené na nahodných súčtoch náhodných veličín. Sú tu opísané základné vlastnosti jednoduchého procesu vetvenia, procesu INAR(1) a binomického autoregresného procesu prvého rádu. Pri každom z týchto modelov je dokázaná markovská vlastnosť a určené podmienky, pri ktorých ide o slabo stacionárny proces. V prípade procesov INAR (1) a binomického AR(1) sú v tejto práci spočítané momenty a kumulanty do štvrtého rádu s využitím vytvárajúcich funkcií náhodných veličín.

Kľúčové slová: náhodné súčty náhodných veličín, momenty, kumulanty, operátor binomického riedenia

Obsah

Zoznam použitých skratiek

$\mathbb{C}$	množina komplexných čísel
$\mathbb{R}$	množina reálnych čísel
$\mathbb{N}$	množina prirodzených čísel
$\mathbb{N}_0$	množina prirodzených čísel a 0
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathsf{E}\,X$	stredná hodnota náhodnej veličiny X
$\operatorname{var} X$	rozptyl náhodnej veličiny X
$\operatorname{cov}(X,Y)$	kovariancia náhodných veličín X a Y
$\operatorname{corr}(X,Y)$	korelačný koeficient náhodných veličín X a Y
$\mathrm{Alt}(p)$	alternatívne rozdelenie s parametrom p
$\mathrm{Bi}(n,p)$	binomické rozdelenie s parametrami n a p
$\mathrm{Po}(\lambda)$	Poissonovo rozdelenie s parametrom λ
$\mathrm{NB}(n,p)$	negatívne binomické rozdelenie s parametrami n a p

Úvod

Štatistici sa často stretávajú s dátami, ktoré bývajú zozbierané v určitých pravidelných časových okamihoch vo forme počtov nejakých udalostí, prípadne vecí. Ako príklad môžeme uviesť počet zákazníkov v banke, počet členov určitej sledovanej populácie alebo počet obsadených telefónnych liniek v call centre. Na modelovanie takýchto celočíselných dát bolo v priebehu posledných desiatok rokov vytvorených niekoľko modelov. V tejto práci sa budeme zaoberať konkrétne troma z nich, ktoré sú založené na náhodných súčtoch náhodných veličín.

V prvej kapitole zavedieme rôzne typy vytvárajúcich funkcií pre nezáporné celočíselné náhodné veličiny a odvodíme niektoré ich vlastnosti, ktoré budeme ďalej využívať. Zadefinujeme tiež markovskú vlastnosť procesu a slabo stacionárny náhodný proces. Pri každom zo študovaných modelov budeme ďalej skúmať, za akých podmienok majú tieto vlastnosti.

V druhej kapitole sa budeme venovať jednoduchému procesu vetvenia, nazývanému tiež Galtonov-Watsonov proces. Ukážeme niektoré vlastnosti jeho vytvárajúcej funkcie pravdepodobnosti a dokážeme, že sa jedná o markovský proces. Vyjadríme explicitné vzorce pre prvé dva jeho momenty v čase t a budeme študovať aká je pravdepodobnosť vyhynutia populácie.

Tretia kapitola sa zaoberá procesom typu INAR(1), ktorý využíva operátor binomického riedenia. Ten zavedieme v prvej časti kapitoly a dokážeme niektoré jeho vlastnosti. Tieto vlastnosti ďalej využijeme, aby sme ukázali, že INAR(1) je homogénny markovský proces, spočítame pravdepodobnosti a taktiež uvedieme dve možnosti ako vhodne zvoliť rozdelenia, aby sa jednalo o slabo stacionárny proces a pre ne spočítame momenty a kumulanty až do štvrtého rádu v čase t.

V záverečnej kapitole budeme skúmať binomický autoregresný proces prvého rádu, pričom ukážeme homogenitu tohto markovského procesu a spočítame vzorec pre pravdepodobnosti prechodu v tomto procese. Určíme prvé štyri momenty a kumulanty tohto procesu v čase t a uvedieme príklad s konkrétnymi vstupnými hodnotami. Taktiež sa budeme zaoberať podmienkami slabej stacionarity a krátko sa zmienime o odhade parametrov tohto procesu.

Kapitola 1

Základné pojmy

V prvej kapitole definujeme vytvárajúce funkcie pre nezápornú celočíselnú náhodnú veličinu a ukážeme niektoré ich vlastnosti. Ďalej odvodíme súvislosť medzi momentmi a kumulantmi náhodnej veličiny a budeme skúmať základné vlastnosti náhodných súčtov náhodných veličín. Taktiež definujeme markovskú vlastnosť náhodného procesu ako aj vlastnosť slabej stacionarity.

1.1 Vytvárajúce funkcie

Definícia 1. *Nech X je nezáporná celočíselná náhodná veličina (ďalej len NCNV). Potom vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti náhodnej veličiny X je definovaná vzorcom*

$$\mathsf{P}_X(t) := \mathsf{E}\, t^X = \sum_{n=0}^{\infty} t^n\, \mathsf{P}(X = n).$$

Poznámka. Predpokladajme, že platí $\mathsf{P}(X < \infty) = 1$. Z definície P_X vidíme, že je definovaná aspoň pre $|t| < 1$. Naviac platí $\mathsf{P}_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(X = n) = 1$.

Definícia 2. *Nech X je NCNV a nech existuje $h > 0$ tak, že $\mathsf{E}\, \mathsf{e}^{tX} < \infty$ pre $|t| < h$. Vytvárajúcu funkciu momentov náhodnej veličiny X definujeme ako*

$$\psi_X(t) := \mathsf{E}\, \mathsf{e}^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{e}^{tn}\, \mathsf{P}(X = n), \quad |t| < h.$$

Definícia 3. *Nech X je NCNV. Potom definujeme charakteristickú funkciu náhodnej veličiny X vzorcom*

$$\varphi_X(t) := \mathsf{E}\, \mathsf{e}^{itX} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{e}^{itn}\, \mathsf{P}(X = n), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Definícia 4. *Nech X je NCNV. Potom vytvárajúca funkcia kumulantov náhodnej veličiny X je daná predpisom*

$$\mathsf{K}_X(t) = \log\left[\varphi_X(t)\right]$$

pre $|t| < h$, kde $h > 0$ také, že φ_X nenadobúda na intervale $(-h,h)$ nulu a kde log *je hlavná vetva komplexného logaritmu.*

V ďalšej časti ukážeme jednoznačnosť vytvárajúcich funkcií a taktiež ich výpočet pre súčet n nezávislých náhodných veličín.

Veta 1. *Nech X,Y sú NCNV. Potom platí, že rozdelenia X a Y sa rovnajú práve vtedy, keď $\mathsf{P}_X = \mathsf{P}_Y$, t.j. rovnajú sa ich vytvárajúce funkcie pravdepodobnosti.*

Dôkaz. K dôkazu tejto vety najprv spočítame $\mathsf{P}(X = n)$ pomocou vytvárajúcej funkcie pravdepodobnosti a následne využijeme jednoznačnosť mocninových radov.

Vieme, že mocninové rady môžeme vnútri ich kruhu konvergencie derivovať člen po člene a tak pre $|t| < 1$ dostávame

$$\mathsf{P}'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1}\, \mathsf{P}(X = n).$$

Pomocou matematickej indukcie zisťujeme, že

$$\mathsf{P}_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)t^{n-k}\, \mathsf{P}(X = n); \quad \forall k \in \mathbb{N}, |t| < 1. \tag{1.1}$$

Po dosadení $t = 0$ do tohto vzorca dostávame explicitné vyjadrenie

$$\mathsf{P}(X = k) = \frac{\mathsf{P}_X^{(k)}(0)}{n!}. \tag{1.2}$$

Naše tvrdenie potom vyplýva priamo z jednoznačnosti mocninných radov. ❑

Veta 2. *Nech X,Y sú NCNV. Potom X a Y majú rovnaké rozdelenie práve vtedy, keď $\varphi_X = \varphi_Y$.*

Dôkaz. Gut (2005), str. 160, veta 1.2. ❑

Veta 3. *Nech $X_1, X_2, \dots, X_n$ sú nezávislé NCNV. Definujme $S_n := X_1 + \dots + X_n$. Potom platí:*

$$P_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} P_{X_k}(t)$$
$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t)$$
$$K_{S_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} K_{X_k}(t)$$
$$\psi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \psi_{X_k}(t)$$

Dôkaz. V dôkaze využijeme základné vlastnosti strednej hodnoty ako aj nezávislosť $X_1, \dots, X_n$.

$$\mathsf{P}_{S_n}(t) = \mathsf{E}\ t^{S_n} = \mathsf{E}\ t^{\sum_{k=1}^n X_k} = \mathsf{E} \prod_{k=1}^n t^{X_k} = \prod_{k=1}^n \mathsf{E}\ t^{X_k} = \prod_{k=1}^n \mathsf{P}_{X_k}(t)$$

$$\varphi_{S_n}(t) = \mathsf{E}\ \mathsf{e}^{itS_n} = \mathsf{E} \prod_{k=1}^n \mathsf{e}^{itX_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t)$$

$$\mathsf{K}_{S_n}(t) = \log \varphi_{S_n}(t) = \sum_{k=1}^n \log \varphi_{X_k}(t) = \sum_{k=1}^n \mathsf{K}_{X_k}(t)$$

$$\psi_{S_n}(t) = \mathsf{E}\ \mathsf{e}^{tS_n} = \mathsf{E} \prod_{k=1}^n \mathsf{e}^{tX_k} = \prod_{k=1}^n \psi_{X_k}(t)$$

❑

1.2 Výpočet momentov a kumulantov

V druhej časti sa budeme zaoberať výpočtom momentov a kumulantov NCNV. Odvodíme vzorce pre momenty pomocou vytvárajúcej funkcie pravdepodobnosti, vytvárajúcej funkcie momentov a charakteristickej funkcie a vzorce pre kumulanty.

Veta 4. *Buď $k \in \mathbb{N}$, X NCNV a P_X jej vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti. Označme $P_X^{(k)}(1_-) = \lim_{t \to 1_-} P_X^{(k)}(t)$. Ak $E\,|X|^k < \infty$, potom*

$$E\ X^{[k]} = E\ X(X-1)\dots(X-k+1) = P_X^{(k)}(1_-). \tag{1.3}$$

Dôkaz. Pre $|t| < 1$ platí (1.1). Aplikáciou limity $t \to 1_-$ na obe strany (1.1) dostávame vzťah

$$\mathsf{P}_X^{(k)}(1_-) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\,\mathsf{P}(X=n).$$

Vďaka predpokladu $\mathsf{E}\ |X|^k < \infty$ vieme, že rad na pravej strane poslednej rovnice konverguje a teda

$$\mathsf{P}_X^{(k)}(1_-) = \mathsf{E}\ X(X-1)\dots(X-k+1).$$

❑

Lemma 5. *Nech X je NCNV a nech požadované momenty existujú a sú konečné. Potom platí:*

$$\begin{aligned}
E\ X &= P'_X(1_-) \\
E\ X^2 &= P''_X(1_-) + P'_X(1_-) \\
E\ X^3 &= P'''_X(1_-) + 3\,P''_X(1_-) + P'_X(1_-) \\
E\ X^4 &= P^{(4)}_X(1_-) + 6\,P'''_X(1_-) + 7\,P''_X(1_-) + P'_X(1_-)
\end{aligned}$$

Dôkaz. Rozpísaním vzorca (1.3) pre $k = 1,2,3,4$ dostávame:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}'_X(1_-) &= \mathsf{E}\ X\\
\mathsf{P}''_X(1_-) &= \mathsf{E}\ X^2 - \mathsf{E}\ X\\
\mathsf{P}'''_X(1_-) &= \mathsf{E}\ X^3 - 3\,\mathsf{E}\ X^2 + 2\,\mathsf{E}\ X\\
\mathsf{P}^{(4)}_X(1_-) &= \mathsf{E}\ X^4 - 6\,\mathsf{E}\ X^3 + 11\,\mathsf{E}\ X^2 - 6\,\mathsf{E}\ X
\end{aligned}$$

Z týchto vzťahov už jednoducho vyjadríme vzorce pre momenty v požadovanom tvare.

❑

Poznámka. Z lemma 5 priamo vyplýva, že ak existuje $\mathsf{E}\ X^2 < \infty$, potom

$$\operatorname{var} X = \mathsf{P}''_X(1_-) + \mathsf{P}'_X(1_-) - [\mathsf{P}'_X(1_-)]^2 \tag{1.4}$$

Veta 6. *Nech X je NCNV a nech jej vytvárajúca funkcia momentov $\psi_X(t)$ existuje pre $|t| < h$ pre nejaké $h > 0$. Potom pre $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$E\ X^n = \psi_X^{(n)}(0). \tag{1.5}$$

Dôkaz. Pretože $\psi_X(t) < \infty$ pre $|t| < h$, môžeme pre tieto t derivovať ψ_X člen po člene:

$$\psi'_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathsf{e}^{tk}\,\mathsf{P}(X = k).$$

Podobne teda pre $n \in \mathbb{N}$

$$\psi_X^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n\mathsf{e}^{tk}\,\mathsf{P}(X = k).$$

Po dosadení $t = 0$ dostávame

$$\psi_X^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n\,\mathsf{P}(X = k) = \mathsf{E}\ X^n.$$

❑

Veta 7. *Nech X je NCNV. Nech $E\,|X|^p < \infty$ pre nejaké $p \in \mathbb{N}$. Nech φ_X je charakteristická funkcia X. Potom pre $n = 1,\ldots,p$ platí*

$$E\ X^n = \frac{\varphi_X^{(n)}(0)}{i^n}. \tag{1.6}$$

Dôkaz. Ukážeme, že platí $\varphi_X^{(n)}(t) = i^n\,\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{itX}X^n\right]$ a potom po dosadení $t = 0$ dostaneme tvrdenie. Postupujeme matematickou indukciou podľa n. Pre $n = 0$ tvrdenie platí z definície $\varphi_X(t)$. Nech $0 < n \leq p - 1$. Predpokladáme, že tvrdenie platí pre n a chceme ukázať, že $\varphi_X^{(n+1)}(t) = i^{n+1}\,\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{itX}X^{n+1}\right]$. Z indukčného predpokladu plynie

$$\frac{1}{h}\left(\varphi_X^{(n)}(t+h) - \varphi_X^{(n)}(t)\right) = i^n\,\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{itX}X^n\frac{e^{ihX}-1}{h}\right].$$

Ďalej odhadneme argument strednej hodnoty:

$$\left|X^n\mathsf{e}^{itX}\frac{e^{ihX}-1}{h}\right| = |X^n|\left|\frac{\cos(hX)-1}{h} + \frac{i\sin(hX)}{h}\right|$$

Pretože funkcia $\cos(hX)$ je spojitá v h, $\cos'(sX) = -X\sin(sX)$ pre $s \in (0,h)$, použitím Lagrangeovej vety o strednej hodnote dostávame, že existuje $\xi \in (0,h)$ také, že

$$\frac{\cos(hX)-\cos 0}{h} = \cos'(\xi X) = -X\sin(\xi X).$$

Rovnakým postupom dostávame aj, že existuje $\eta \in (0,h)$, pre ktoré

$$X\cos(\eta X) = \frac{\sin(hX)}{h}.$$

Preto

$$\begin{aligned}\left|X^n\mathsf{e}^{itX}\frac{e^{ihX}-1}{h}\right| &= |X^n|\,|-X\sin(\xi X) + iX\cos(\eta X)| \\ &= \left|X^{n+1}\right|\,|-\sin(\xi X) + i\cos(\eta X)| \\ &\le 2\left|X^{n+1}\right|.\end{aligned}$$

Pretože $n+1 \le p$ dostávame integrovateľnú majorantu a s použitím Lebesgueovej vety o zámene limity a strednej hodnoty dostávame

$$\begin{aligned}\varphi_X^{(n+1)}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\varphi_X^{(n)}(t+h) - \varphi_X^{(n)}(t)\right) = i^n\,\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{itX}X^n\lim_{h\to 0}\frac{\mathsf{e}^{ihX}-1}{h}\right] \\ &= i^{n+1}\,\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{itX}X^{n+1}\right].\end{aligned}$$

❑

Ďalej sa budeme venovať výpočtu kumulantov náhodnej veličiny z jej kumulantovej vytvárajúcej funkcie a odvodíme vzťahy medzi kumulantmi a momentmi. Taktiež ukážeme explicitné vzorce pre tieto vzťahy až do štvrtého rádu. Najskôr však niekoľko pomocných tvrdení.

Veta 8. *Nech X je NCNV a $\mathsf{K}(t)$ je jej vytvárajúca funkcia kumulantov. Potom existuje okolie 0 na ktorom môžeme $\mathsf{K}(t)$ rozviesť do Maclaurinovho radu:*

$$\mathsf{K}(t) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\kappa_j}{j!}(it)^j + o(|t|^n).$$

Potom kumulanty κ sa dajú vyjadriť ako:

$$\kappa_j = i^{-j}\mathsf{K}^{(j)}(0). \tag{1.7}$$

Dôkaz. Dôkaz vychádza z Maclaurinovho rozvoja funkcie $\log(1+z)$ (viď Lukacs, 1970, sekcia 2.4).

❑

Veta 9 (Faá de Brunov vzorec)**.** *Nech $f,g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ a majú vlastnú deriváciu až do rádu $n \in \mathbb{N}$. Potom platí*

$$f[g(t)]^{(n)} = \sum \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} f^{(k)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{g^{(n)}(t)}{n!}\right)^{k_n}, \tag{1.8}$$

kde $k = \sum_{j=1}^{n} k_j$ a sčítavame cez všetky n-tice $k_1, \dots k_n$, ktoré spĺňajú

$$\sum_{j=1}^{n} j k_j = n.$$

Dôkaz. Viď Roman (1980).

❑

Pomocou predchádzajúcich dvoch tvrdení tak môžme vyjadriť vzťahy medzi kumulantmi a momentmi náhodnej veličiny.

Veta 10. *Nech X je NCNV s vytvárajúcou funkciou kumulantov K. Označme $\mu_j = \mathsf{E}\, X^j, j \in \mathbb{N}$, ak existujú.Potom pre kumulanty $\kappa_1, \dots \kappa_4$ platí:*

$$\begin{aligned}
&Ak\ \ \mathsf{E}\,|X| < \infty, potom && \kappa_1 = \mu_1,\\
&Ak\ \ \mathsf{E}\,X^2 < \infty, potom && \kappa_2 = \mu_2 - \mu_1^2,\\
&Ak\ \ \mathsf{E}\,|X|^3 < \infty, potom && \kappa_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3,\\
&Ak\ \ \mathsf{E}\,X^4 < \infty, potom && \kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 + 12\mu_1^2\mu_2 - 6\mu_1^4.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Dôkaz. Vďaka (1.7) stačí spočítať $\mathsf{K}^{(j)}(0)$. K tomu využijeme, že $\mathsf{K}(t) = \log[\varphi(t)]$ a vzorec (1.8). Podľa (1.6) máme $\varphi^{(n)}(0) = i^n \mu_n$. Po dosadení do (1.8) dostávame

$$\mathsf{K}^{(n)}(0) = \sum \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} \log^{(k)}(\varphi(0)) \left(\frac{i\mu_1}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{i^n \mu_n}{n!}\right)^{k_n},$$

kde $k = \sum_{j=1}^{n} k_j$ a sčítavame cez všetky n-tice $k_1, \dots k_n$, ktoré spĺňajú $\sum_{j=1}^{n} j k_j = n$. Vďaka tomu, že $\varphi(0) = 1$ a $\log^{(k)}(t) = (-1)^{k-1}(k-1)! \frac{1}{t^{k-1}}$ dostávame všeobecný vzorec pre kumulanty:

$$\kappa_n = \sum \frac{n!(k-1)!}{k_1! \dots k_n! 1!^{k_1} 2!^{k_2} \dots n!^{k_n}} (-1)^{k-1} \mu_1^{k_1} \dots \mu_n^{k_n} \tag{1.10}$$

Ak uvážime všetky možné rozklady čísel 1, 2,3 a 4, ktoré vyhovujú podmienke na k_j, menovite

$$\begin{aligned}
&1 = 1 \cdot 1,\\
&2 = 2 \cdot 1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2,\\
&3 = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3,\\
&4 = 4 \cdot 1 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2\\
&\quad = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4,
\end{aligned}$$

potom dostávame nasledujúce vzorce:

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= 1 \cdot (-1)^0 \mu_1^1 = \mu_1, \\
\kappa_2 &= \frac{2!}{2!}(-1)^1 \mu_1^2 + \frac{2!}{2!}(-1)^0 \mu_2^1 = -\mu_1^2 + \mu_2, \\
\kappa_3 &= \frac{3!2!}{3!}(-1)^2 \mu_1^3 + \frac{3!}{2!}(-1)^1 \mu_1^1 \mu_2^1 + \frac{3!}{3!}(-1)^0 \mu_3^1 = 2\mu_1^3 - 3\mu_1\mu_2 + \mu_3, \\
\kappa_4 &= \frac{4!3!}{4!}(-1)^3 \mu_1^4 + \frac{4!2!}{2!2!}(-1)^2 \mu_1^2 \mu_2^1 + \frac{4!}{3!}(-1)^1 \mu_1^1 \mu_3^1 + \frac{4!}{2!2!^2}(-1)^1 \mu_2^2 + \frac{4!}{4!}(-1)^0 \mu_4^1 \\
&= -6\mu_1^4 + 12\mu_1^2\mu_2 - 4\mu_1\mu_3 - 3\mu_2^2 + \mu_4,
\end{aligned}$$

čo je (1.9).

❑

Poznámka. Z vety 10 plynie, že prvý kumulant κ_1 sa rovná strednej hodnote $\mathsf{E}\, X$, zatiaľčo κ_2 má význam rozptylu náhodnej veličiny.

1.3 Náhodné súčty náhodných veličín

Veta 11. *Nech M je náhodná veličina s hodnotami v kladných celých číslach a nech $E\,|M| < \infty$. Nech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sú nezávislé, rovnako rozdelené NCNV, nezávislé na M. Definujme*

$$S_M := \sum_{k=1}^{M} X_k.$$

Potom platí

$$P_{S_M}(t) = P_M\left[P_{X_1}(t)\right]. \tag{1.11}$$

Dôkaz. Zo znalostí vlastností podmienenej strednej hodnoty vieme, že platí

$$\mathsf{P}_{S_M}(t) = \mathsf{E}\, t^{S_M} = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[t^{S_M} \mid M\right]\right].$$

Spočítajme teda pravú stranu rovnosti:

$$\mathsf{E}\left[t^{S_M} \mid M = n\right] = \mathsf{E}\left[t^{S_n} \mid M = n\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}\left[t^{X_k}\right] = \left[\mathsf{P}_{X_1}(t)\right]^n.$$

Predposledná rovnosť platí vďaka predpokladu nezávislosti M a $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dostávame

$$\mathsf{P}_{S_M}(t) = \mathsf{E}\left[\mathsf{P}_{X_1}(t)\right]^M = \mathsf{P}_M\left[\mathsf{P}_{X_1}(t)\right].$$

❑

Lemma 12. *Za platnosti predpokladov vety 11 platí:*

$$\varphi_{S_M}(t) = P_M\left[\varphi_{X_1}(t)\right].$$

Ak existuje ψ_{X_1}, potom

$$\psi_{S_M}(t) = P_M\left[\psi_{X_1}(t)\right].$$

Dôkaz. Dôkaz je analogický s dôkazom vety 11. ❑

Veta 13. *Nech platia predpoklady vety 11.*

(i) Ak $\mathsf{E}\,|X_1| < \infty$*, potom* $\mathsf{E}\,S_M = \mathsf{E}\,M\,\mathsf{E}\,X_1$.

(ii) Ak $\mathsf{E}\,X_1^2 < \infty$*, potom* $\operatorname{var} S_M = \operatorname{var} X_1\,\mathsf{E}\,M + \operatorname{var} M(\mathsf{E}\,X_1)^2$.

Dôkaz. Z (1.3) a vďaka tomu, že $\mathsf{P}_X(1_-) = 1$ máme

$$\mathsf{E}\ S_M = \mathsf{P}'_{S_M}(1_-) = [\mathsf{P}_M(\mathsf{P}_{X_1}(1_-))]' = \mathsf{P}'_M\,[\mathsf{P}_{X_1}(1_-)]\,\mathsf{P}'_{X_1}(1_-) = \mathsf{E}\ M\,\mathsf{E}\ X_1.$$

K dôkazu druhej časti si najskôr vyjadrime $\mathsf{P}''_{S_M}(1_-)$.

$$\begin{aligned}\mathsf{P}''_{S_M}(1_-) &= \mathsf{P}''_M\,[\mathsf{P}_{X_1}(1_-)]\,\left[\mathsf{P}'_{X_1}(1_-)\right]^2 + \mathsf{P}'_M\,[\mathsf{P}_{X_1}(1_-)]\,\mathsf{P}''_{X_1}(1_-)\\ &= \mathsf{E}\ [M(M-1)]\,(\mathsf{E}\ X_1)^2 + \mathsf{E}\ M\,\mathsf{E}\ [X_1(X_1-1)]\,.\end{aligned}$$

Po dosadení do (1.4) dostávame

$$\begin{aligned}\operatorname{var} S_M &= \mathsf{E}\ M(M-1)\,\mathsf{E}\ X_1^2 + \mathsf{E}\ M\,\mathsf{E}\ X_1(X_1-1) + \mathsf{E}\ M\,\mathsf{E}\ X_1 - (\mathsf{E}\ M)^2(\mathsf{E}\ X_1)^2\\ &= (\mathsf{E}\ X_1)^2(\operatorname{var} M - \mathsf{E}\ M) + \mathsf{E}\ M\,\mathsf{E}\ X_1^2\\ &= \operatorname{var} M(\mathsf{E}\ X_1)^2 + \mathsf{E}\ M \operatorname{var} X_1.\end{aligned}$$

❑

1.4 Generujúce funkcie niektorých nezáporných celočíselných náhodných veličín

Veta 14. *Nech* $p \in (0{,}1)$, $q = 1-p$, $\lambda > 0$ *a* $n \in \mathbb{N}$*. Potom platia nasledujúce vzťahy:*

Rozdelenie X	P_X	φ_X	ψ_X
Alternatívne (p)	$1-p+pt$	$1-p+p\mathrm{e}^{it}$	$1-p+p\mathrm{e}^{t}$
Binomické (n,p)	$(1-p+pt)^n$	$(1-p+p\mathrm{e}^{it})^n$	$(1-p+p\mathrm{e}^{t})^n$
Poissonovo (λ)	$\exp\{\lambda(t-1)\}$	$\exp\{\lambda(\mathrm{e}^{it}-1)\}$	$\exp\{\lambda(\mathrm{e}^{t}-1)\}$
Geometrické (p)	$\frac{p}{1-qt}$	$\frac{p}{1-q\mathrm{e}^{it}}$	$\frac{p}{1-q\mathrm{e}^{t}}$
Negatívne binomické (n,p)	$\frac{p^n}{(1-qt)^n}$	$\frac{p^n}{(1-q\mathrm{e}^{it})^n}$	$\frac{p^n}{(1-q\mathrm{e}^{t})^n}$

Dôkaz. Pre alternatívne rozdelenie plynie tvrdenie priamo z definície. Binomické rozdelenie s parametrami (n,p) sa dá napísať ako súčet n nezávislých alternatívnych rozdelení s parametrom p. Vďaka vzťahu z vety 3 dostaneme výsledné vzorce. Pre ostatné rozdelenia odvodíme vzorce pre P_X. Zvyšné dve generujúce funkcie dostaneme úplne analogicky. Pre Poissonovo rozdelenie platí $\mathsf{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathsf{e}^{-\lambda}$, $k=0,1,\dots$.

$$\mathsf{P}_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty} t^k\frac{\lambda^k}{k!}\mathsf{e}^{-\lambda}=\mathsf{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}=\mathsf{e}^{-\lambda}\mathsf{e}^{\lambda t}=\exp\{\lambda(t-1)\},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Pre geometrické rozdelenie platí $\mathsf{P}(X=k)=p(1-p)^k, k=0,1,\dots$.

$$\mathsf{P}_X(t)=p\sum_{k=0}^{\infty} t^k q^k=\frac{p}{1-qt},\quad |t|<\frac{1}{q}.$$

Ak uvážime nezávislé náhodné veličiny $Y_1,\dots,Y_n$ s geometrickým rozdelením s parametrom p, potom môžeme $X\sim \mathrm{NB}(n,p)$ vyjadriť ako

$$X=\sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

Potom teda:

$$\mathsf{P}_X(t)=[P_{Y_1}(t)]^n=\frac{p^n}{(1-tq)^n}.$$

❑

1.5 Markovská vlastnosť a slabá stacionarita

Pri posudzovaní modelov v ďalších kapitolách ukážeme, že sa jedná o markovské procesy. Takisto budeme hľadať podmienky, za ktorých sa jedná o slabo stacionárne procesy. V tejto časti si zadefinujeme oba pojmy, ktoré budeme ďalej používať.

Definícia 5. *Povieme, že náhodný proces $\{X_t, t\in\mathbb{N}_0\}$, kde X_t je NCNV pre $\forall t\in\mathbb{N}_0$, má markovskú vlastnosť, pre $t\in\mathbb{N}_0$, $k,l,m_0,\dots,m_{t-1}\in\mathbb{N}_0$, pre ktoré $P(X_t=l, X_{t-1}=m_{t-1},\dots,X_0=m_0)>0$ platí*

$$P(X_{t+1}=k\mid X_t=l)=P(X_{t+1}=k\mid X_t=l, X_{t-1}=m_{t-1},\dots,X_0=m_0).$$

Proces $\{X_t, t\in\mathbb{N}_0\}$ nazývame markovským procesom, ak má markovskú vlastnosť. Pravdepodobnosti $P(X_{t+n}=k\mid X_t=l)$ sa nazývajú pravdepodobnosti prechodu n-tého rádu zo stavu l v čase t do stavu k v čase $t+n$, pre $n\in\mathbb{N}_0$. Proces nazveme homogénnym, ak jeho pravdepodobnosti prechodu všetkých rádov nezávisia na t, iba na n.

Poznámka. Indukciou sa dá ľahko ukázať, že na homogenitu procesu stačí, ak sú pravdepodobnosti prechodu prvého rádu nezávislé na čase. V dôkaze sa postupuje analogicky ako v dôkaze vety 2.2 v Prášková a Lachout (2012).

Definícia 6. *Nech* $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ *je náhodný proces,* X_t *sú NCNV a* $\mathsf{E}\, X_t^2 < \infty$ *pre* $t \in \mathbb{N}_0$. *Povieme, že je slabo stacionárny, ak platí*

$$\mathsf{E}\, X_t = \mathsf{E}\, X_s, \quad \forall t,s \in \mathbb{N}_0, \qquad cov(X_t, X_s) = R(t-s),$$

kde R *je funkcia, ktorá závisí len na* $t - s$. *Funkciu* R *nazývame autokovariančná funkcia náhodného procesu* $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$. *Zrejme platí* $R(t) = R(-t)$, *pre* $t \in \mathbb{Z}$.

Poznámka. Pretože $\operatorname{var} X_t = \operatorname{cov}(X_t, X_t) = R(0)$, rozptyl musí byť tiež konštantný nezávisle na t.

Kapitola 2

Jednoduchý proces vetvenia

Pri skúmaní nášho prvého modelu využijeme poznatky odvodené v prvej kapitole tejto práce. Jednoduchý proces vetvenia, tiež nazývaný Galtonov-Watsonov-Bienymého proces, je priamou aplikáciou náhodných súčtov náhodných veličín. Tento model prvýkrát vzišiel z problému, ktorý skúmali p. Galton a p. Watson: Ako veľmi plodní musia byť členovia rodiny, aby nevymrelo jej rodové meno? V dnešnej dobe sa jednoduchý proces vetvenia používa na simuláciu počtu členov populácie, či k štúdiu počtu čakateľov na úradoch, pričom za počet novovzniknutých členov novej generácie sa považuje počet nových zákazníkov, ktorí pribudli počas vybavovania dotyčného "predka".

2.1 Zavedenie

Základným kameňom modelu je rozdelenie $\{p_k\}$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, $p_k \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}_0$. Populácia začína v čase 0 (nultou generáciou), v ktorej predpokladáme jedného člena ("predka"). V prvom kroku, teda v čase 1, sa tento predok rozdelí na k členov prvej generácie s pravdepodobnosťou p_k. V druhom kroku sa každý z týchto potomkov rozdelí opäť na k členov druhej generácie s pravdepodobnosťou p_k, pričom predpokladáme, že delenie potomkov prebieha nezávisle na sebe a taktiež nezávisle na delení v predchádzajúcich krokoch. Takto proces pokračuje ďalej až do stavu "vyhynutia", ktorý môže, ale nemusí nastať. Vyhynutie nastane, ak sa všetci členovia jednej generácie rozdelia na 0 potomkov a teda zahynú.

Formálne môžeme jednoduchý proces vetvenia definovať takto:

Nech $\{Z_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ sú nezávislé rovnako rozdelené NCNV,

$$\mathsf{P}(Z_{1,1} = k) = p_k, \quad \text{kde} \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,\, p_k \in [0,1],\, \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Jednoduchý proces vetvenia $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je definovaný takto:

$$\begin{aligned} X_0 &= 1, \\ X_{n+1} &= \sum_{k=1}^{X_n} Z_{n+1,k}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

V tomto modeli uvažujeme $Z_{n+1,k}$ ako počet potomkov k-teho člena n-tej generácie.

Veta 15. *Jednoduchý proces vetvenia definovaný vzorcom* (2.1) *má markovskú vlastnosť.*

Dôkaz.

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}(X_{t+1} = k \mid X_t = l, X_{t-1} = m_{t-1}, \dots, X_0 = m_0) \\
&\qquad = \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{X_t} Z_{t+1,i} = k \mid X_t = l, X_{t-1} = m_{t-1}, \dots, X_0 = m_0\right) \\
&\qquad = \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Z_{t+1,i} = k \mid X_t = l, X_{t-1} = m_{t-1}, \dots, X_0 = m_0\right) \\
&\qquad = \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Z_{t+1,i} = k\right) \qquad (2.2) \\
&\qquad = \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Z_{t+1,i} = k \mid X_t = l\right) \qquad (2.3) \\
&\qquad = \mathsf{P}(X_{t+1} = k \mid X_t = l),
\end{aligned}
$$

pričom rovnosti (2.2) a (2.3) platia vďaka nezávislosti $Z_{t+1,1}, \dots, Z_{t+1,l}$ a $X_t, \dots, X_0$.

❑

2.2 Vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti

Označme P_n vytvárajúcu funkciu pravdepodobnosti náhodnej veličiny X_n a P vytvárajúcu funkciu pravdepodobnosti náhodnej veličiny $Z_{1,1}$.

$$\mathsf{P}_0(t) = t, \ \mathsf{P}_1(t) = \mathsf{P}(t).$$

Z (1.11) a (2.1) dostávame

$$\mathsf{P}_n(t) = \mathsf{P}_{n-1}(\mathsf{P}(t)), \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (2.4)$$

Z toho vidíme:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}_2(t) = \mathsf{P}(\mathsf{P}(t)), \\
&\mathsf{P}_3(t) = \mathsf{P}_2(\mathsf{P}(t)) = \mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathsf{P}(t))) = \mathsf{P}(\mathsf{P}_2(t)).
\end{aligned}
$$

Ak budeme ďalej pokračovať v tomto postupe, dospejeme ku vzorcu:

$$\mathsf{P}_{n+1}(t) = \mathsf{P}_n(\mathsf{P}(t)) = \mathsf{P}(\mathsf{P}_n(t)), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Na vetvenie sa môžeme teda pozerať ako na skladanie vytvárajúcich funkcií pravdepodobnosti. Spočítať samotné rozdelenie X_n prináša mnohokrát veľmi zdĺhavý postup založený na iteračnom vzorci (2.4). Napriek tomu môžeme spočítať niektoré vlastnosti náhodnej veličiny X_n.

2.3 Výpočet momentov a slabá stacionarita

Pre výpočty momentov využijeme poznatky z prvej kapitoly o náhodných súčtoch náhodných veličín. Zaveďme si najskôr pomocné značenie pre lepšiu prehľadnosť výpočtov. Označme

$$\begin{aligned}\mu &:= \mathsf{E}\ Z_{1,1},\\ \sigma^2 &:= \operatorname{var} Z_{1,1},\\ \mu_n &:= \mathsf{E}\ X_n,\\ \sigma_n^2 &:= \operatorname{var} X_n.\end{aligned}$$

Ďalej v tejto kapitole budeme predpokladať, že $\mu < \infty$, $\sigma^2 < \infty$.
Aplikáciou vety 13 dostávame vzorec $\mu_{n+1} = \mu_n \mu$ a teda

$$\mu_n = \mu^n.$$

Spočítajme ďalej rozptyl X_n. Vďaka vete 13 vieme, že

$$\begin{aligned}\sigma_2^2 &= \sigma^2\mu^2 + \mu\sigma^2 = \sigma^2\mu(1+\mu),\\ \sigma_3^2 &= \sigma^2\mu^3(1+\mu) + \mu^2\sigma^2 = \sigma^2\mu^2(1+\mu+\mu^2),\\ &\vdots\\ \sigma_{n+1}^2 &= \sigma^2\mu^n(1+\cdots+\mu^n).\end{aligned}$$

Rozptyl veličiny X_{n+1} môžeme teda spočítať vzorcom

$$\sigma_{n+1}^2 = \begin{cases}\sigma^2\mu^n(\frac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu}), & \text{ak } \mu \neq 1,\\ \sigma^2(n+1), & \text{ak } \mu = 1.\end{cases}$$

Pri vyšetrovaní slabej stacionarity si povšimneme, že zo vzťahu $\mu_n = \mu^n$ vyplýva, že proces môže byť slabo stacionárny len ak $\mu = 1$. Keďže musí byť konštantný aj rozptyl $\sigma_n^2 = \sigma^2 n$, musíme mať $\sigma^2 = 0$. Jediná možnosť ako toto však môže nastať je, ak $p_1 = 1, p_k = 0\,\forall k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$. Za takéhoto počiatočného rozdelenia dostávame jediný možný slabo stacionárny jednoduchý proces vetvenia, ktorý sa s pravdepodobnosťou 1 rovná konštantne 1 v každom čase $n \in \mathbb{N}_0$.

2.4 Pravdepodobnosť vyhynutia

Nasledujúca sekcia bola spracovaná podľa Resnick (1992). Budeme v nej študovať vyhynutie procesu, ktoré bolo opísané v úvode do tejto kapitoly. Pre tieto účely uvažujme $p_1 < 1$. V opačnom prípade bude proces pokračovať konštantne s pravdepodobnosťou 1 a nikdy nevyhynie. Taktiež predpokladajme, že $0 < p_0 < 1$ a teda k vyhynutiu môže dôjsť s nenulovou pravdepodobnosťou a nenastane s istotou hneď v čase 1. Vyhynutie môžeme formálne definovať ako náhodný jav

$$[\text{vyhynutie}] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [X_n = 0].$$

Budeme chcieť spočítať pravdepodobnosť, že takýto jav nastane, označme teda $\pi = \mathsf{P}[\text{vyhynutie}]$. Keďže $[X_n = 0] \subset [X_{n+1} = 0]$ máme

$$\begin{aligned}\pi = \mathsf{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}[X_n = 0]) &= \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{k}[X_n = 0]\right) \\ = \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}(X_k = 0) &= \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}_k(0).\end{aligned}$$

Označme $\pi_n := \mathsf{P}(X_n = 0)$ pravdepodobnosť, že vyhynutie nastane do času n vrátane. Potom $\pi = \lim_{n\to\infty} \pi_n$. Vidíme, že $\pi_n = \mathsf{P}_n(0)$. Vďaka (2.4)

$$\pi_{n+1} = \mathsf{P}_{n+1}(0) = \mathsf{P}(\mathsf{P}_n(0)) = \mathsf{P}(\pi_n).$$

Pretože P je spojitá funkcia, aplikáciou limity $n \to \infty$ na obe strany dostávame

$$\pi = \mathsf{P}(\pi). \tag{2.5}$$

Pretože $\mathsf{P}(1) = 1$, P je neklesajúca konvexná funkcia na (0,1) (vyplýva z (1.1)) a $\mathsf{P}(0) \geq 0$ vieme, že rovnici (2.5) vyhovujú na intervale [0,1] najviac dva body.

Veta 16.

$$\pi = \min\{q \in [0,1] \mid P(q) = q\}$$

Dôkaz. Predpokladajme, že $q \in [0,1]$ také, že $\mathsf{P}(q) = q$. Ukážeme, že $\pi \leq q$. P je neklesajúca funkcia na [0,1] a preto

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \mathsf{P}(0) \leq \mathsf{P}(q) = q, \\ \pi_2 = \mathsf{P}_2(0) &= \mathsf{P}(\pi_1) \leq \mathsf{P}(q) = q.\end{aligned}$$

Indukciou teda dostaneme $\pi_n \leq q$ a aplikáciou $n \to \infty$ dostávame $\pi \leq q$.

❑

Dôsledok.

$$\begin{aligned}&\text{Ak } \mu \leq 1, \text{potom} && \pi = 1, \\ &\text{ak } \mu > 1, \text{potom} && \pi < 1.\end{aligned}$$

Dôkaz. Vieme, že $\mathsf{P}(0) = \mathsf{P}(X_1 = 0) > 0$ a $\mathsf{P}'(1) = \mu$. Ak $\mu \leq 1$, potom z konvexity P vieme, že $\mathsf{P}(s) \geq s$ pre $0 \leq s \leq 1$. Pretože P nie je lineárna funkcia (tento prípad sme vylúčili predpokladom $p_1 < 1$ v úvode do tejto sekcie) platí, že $\mathsf{P}(s) > s$ na [0,1) a rovnica (2.5) má na intervale [0,1] jediné riešenie $\pi = 1$. Ak $\mu > 1$, potom existuje $s_0 \in (0,1)$, pre ktoré $\mathsf{P}(s_0) < s_0$. Vďaka konvexite P a tomu, že $\mathsf{P}(0) > 0$ existuje práve jedno $s \in (0,s_0)$ tak, že $\mathsf{P}(s) = s$ a teda $\pi < 1$.

❑

Kapitola 3

Proces INAR(1)

Autoregresívne celočíselné modely ako samostatnú triedu procesov prvýkrát navrhli a študovali Al-Osh a Alzaid (1987) vo svojej práci First-order Integer-Valued Autoregresive (INAR(1)) process. Príklady využitia tohto prístupu sú modelovanie počtu pacientov v nemocnici v určitom čase, počtu ľudí čakajúcich v rade alebo počtu epileptických záchvatov pacienta za deň (Da Silva a Oliveira, 2004). Pre zavedenie triedy procesov INAR(1) najskôr definujeme operátor binomického riedenia, založený na náhodných súčtoch rovnako rozdelených náhodných veličín s alternatívnym rozdelením. Následne zadefinujeme INAR(1) proces a určíme niektoré jeho vlastnosti. Na záver spočítame dva prípady, kedy ide o slabo stacionárny proces. Pri stacionárnom procese s marginálnym Poissonovým rozdelením uvedieme príklad realizácie tohto procesu, vytvorený v jazyku R.

3.1 Operátor binomického riedenia

Definícia 7. *Nech X je NCNV. Potom pre $\alpha \in [0,1]$ definujeme operátor binomického riedenia:*

$$\alpha \circ X := \sum_{i=1}^{X} Y_i, \tag{3.1}$$

kde Y_i sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny, nezávislé s X, s rozdelením

$$\alpha = \mathsf{P}(Y_1 = 1) = 1 - \mathsf{P}(Y_1 = 0).$$

Veta 17 (Vlastnosti operátora binomického riedenia)**.** *Nech X a Y sú NCNV, $\alpha, \beta \in [0,1]$ a nech existujú požadované momenty X a Y.*

(i) $0 \circ X = 0$, *skoro iste,*

(ii) $1 \circ X = X$, *skoro iste,*

(iii) $\mathsf{P}_{\alpha \circ X}(t) = \mathsf{P}_X(1 - \alpha + \alpha t)$, *pre t, pre ktoré je pravá strana definovaná,*

(iv) $\alpha \circ (\beta \circ X)$ *má rovnaké rozdelenie ako* $(\alpha\beta) \circ X$,

(v) $\mathsf{E}(\alpha \circ X) = \alpha \, \mathsf{E}\, X$,

(vi) $\mathsf{E}(\alpha \circ X)^2 = \alpha^2 \, \mathsf{E}\, X^2 + \alpha(1-\alpha)\, \mathsf{E}\, X$,

(vii) $\mathsf{E}[X(\alpha\circ Y)] = \alpha\,\mathsf{E}(XY)$,

(viii) ak sú X a Y nezávislé, potom $\mathsf{E}[(\alpha\circ X)(\beta\circ Y)] = \alpha\beta\,\mathsf{E}\,X\,\mathsf{E}\,Y$.

Dôkaz. (i) a (ii) vyplývajú priamo z definície operátora, (iii) dostaneme aplikáciou (1.11). Na dôkaz bodu (iv) nám stačí ukázať, že sa rovnajú príslušné vytvárajúce funkcie pravdepodobnosti a tvrdenie dostaneme z vety 1.

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{\alpha\circ(\beta\circ X))}(t) &= \mathsf{P}_{\beta\circ X}(1-\alpha+\alpha t) = \mathsf{P}_X[1-\beta+\beta(1-\alpha+\alpha t)]\\ &= \mathsf{P}_X(1-\alpha\beta+\alpha\beta t) = \mathsf{P}_{(\alpha\beta)\circ X}(t)\end{aligned}$$

Keďže $\mathsf{E}\,Y_1 = \alpha$, tvrdenie (v) vyplýva priamo z vety 13. Vieme, že

$$\mathsf{E}\,(\alpha\circ X)^2 = \mathsf{P}''_{\alpha\circ X}(1_-) + \mathsf{P}'_{\alpha\circ X}(1_-).$$

K bodu (vi) teda stačí vyjadriť

$$\mathsf{P}''_{\alpha\circ X}(1_-) = \alpha^2\,\mathsf{P}''_X(1_-) = \alpha^2\,\mathsf{E}\,X^2 - \alpha^2\,\mathsf{E}\,X.$$

Potom teda $\mathsf{E}\,(\alpha\circ X)^2 = \alpha^2\,\mathsf{E}\,X^2 - \alpha^2\,\mathsf{E}\,X + \alpha\,\mathsf{E}\,X = \alpha^2\,\mathsf{E}\,X^2 + \alpha(1-\alpha)\,\mathsf{E}\,X$. Bod (vii) ukážeme s využitím podmienenej strednej hodnoty:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,[X(\alpha\circ Y)] &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{E}\,[X(\alpha\circ Y)\mid Y=k]\,\mathsf{P}(Y=k)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{E}\,[X\sum_{i=1}^{k}Z_i\mid Y=k]\,\mathsf{P}(Y=k)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}\,[XZ_i\mid Y=k]\,\mathsf{P}(Y=k)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}k\,\mathsf{E}\,[XZ_1\mid Y=k]\,\mathsf{P}(Y=k)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{E}\,Z_1\,\mathsf{E}\,[Xk\mid Y=k]\,\mathsf{P}(Y=k)\\ &= \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{E}\,[XY\mid Y=k]\,\mathsf{P}(Y=k)\\ &= \alpha\,\mathsf{E}\,XY,\end{aligned}$$

kde Z_i sú nezávislé, rovnako rozdelené náhodné veličiny, nezávislé na X a Y a s alternatívnym rozdelením s parametrom α.

Rovnakým postupom a využitím predpokladu nezávislosti v poslednej rovnosti dostaneme $\mathsf{E}\,[(\alpha\circ X)(\beta\circ Y)] = \alpha\beta\,\mathsf{E}\,XY = \alpha\beta\,\mathsf{E}\,X\,\mathsf{E}\,Y$, čo je tvrdenie (viii).

❏

3.2 Definícia INAR(1) a základné vlastnosti

Definícia 8. *Náhodný proces $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ s diskrétnym časom je INAR(1) proces, ak pre $t \geq 1$ platí*

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + e_t, \tag{3.2}$$

kde $\alpha \in (0,1)$ a $\{e_t\}$ je postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených NCNV, nezávislých od $\{X_t\}$. Označme $\mu_e = \mathsf{E}\, e_1$.

Poznámka. Hodnotu X_t v čase $t \geq 1$ môžeme teda rozdeliť na dve zložky. Na prvky z času $t-1$ ktoré sa zachovali (každý z pravdepodobnosťou α) a na nové prvky, ktoré vznikli v časovom intervale $(t-1,t]$.

Veta 18. *INAR(1) proces definovaný v (3.2) má markovskú vlastnosť.*

Dôkaz.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X_{t+1} = k \mid X_t = l, X_{t-1} = m_{t-1}, \ldots, X_0 = m_0)& \\
= \mathsf{P}(\alpha \circ X_t + e_{t+1} = k \mid X_t = l, X_{t-1} = m_{t-1}, \ldots, X_0 = m_0)& \\
= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{X_t} Y_i + e_{t+1} = k \mid X_t = l, X_{t-1} = m_{t-1}, \ldots, X_0 = m_0\right)& \\
= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Y_i + e_{t+1} = k \mid X_t = l, X_{t-1} = m_{t-1}, \ldots, X_0 = m_0\right)& \\
= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Y_i + e_{t+1} = k\right)& \qquad (3.3) \\
= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Y_i + e_{t+1} = k \mid X_t = l\right)& \qquad (3.4) \\
= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{X_t} Y_i + e_{t+1} = k \mid X_t = l\right)& \\
= \mathsf{P}(X_{t+1} = k \mid X_t = l),&
\end{aligned}$$

kde (3.3) a (3.4) plynú z nezávislosti $Y_1, \ldots, Y_l, e_{t+1}$ a $X_t, \ldots, X_0$.

❏

Veta 19. *Nech $t \in \mathbb{N}_0$ a $l \in \mathbb{N}_0$ také, že $P(X_t = l) > 0$. Potom pre $k \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$P(X_{t+1} = k \mid X_t = l) = \sum_{r=0}^{\min\{k,l\}} \binom{l}{r} \alpha^r (1-\alpha)^{l-r} P(e_1 = k - r).$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X_{t+1} = k \mid X_t = l) &= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{X_t} Y_i + e_{t+1} = k \mid X_t = l\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Y_i + e_{t+1} = k \mid X_t = l\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Y_i + e_{t+1} = k\right) \qquad (3.5) \\
&= \sum_{r=0}^{k} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Y_i = r, e_{t+1} = k - r\right) \\
&= \sum_{r=0}^{k} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Y_i = r\right) \mathsf{P}(e_{t+1} = k - r) \qquad (3.6) \\
&= \sum_{r=0}^{\min\{k,l\}} \binom{l}{r} \alpha^r (1-\alpha)^{l-r} \, \mathsf{P}(e_1 = k - r) \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

V prvej rovnici využívame definíciu binomického riedenia a zavádzame tak náhodné veličiny Y_i, ktoré sú nezávislé, nezávislé na X_t a e_{t+1} a majú rovnaké rozdelenie $\mathrm{Alt}(\alpha)$. Pretože aj e_{t+1} je nezávislé s X_t, platí rovnosť (3.5). Vďaka nezávislosti $Y_1, \ldots, Y_l$ a e_{t+1} dostávame (3.6). Pri poslednej rovnosti využívame fakt, že $\sum_{i=1}^{l} Y_i$ má rozdelenie $\mathrm{Bi}(l,\alpha)$ a taktiež, že e_{t+1} má pre všetky t rovnaké rozdelenie ako e_1.

❑

Dôsledok. Náhodný proces INAR(1) je homogénny markovský proces.

Veta 20. *Označme P_e vytvárajúcu funkciu pravdepodobnosti e_1. Vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti náhodnej veličiny X_t, $t \in \mathbb{N}$, definovanej v* (3.2) *je daná rekurentným vzťahom*

$$P_{X_t}(s) = P_{X_{t-k}}(1 - \alpha^k + \alpha^k s) \prod_{i=0}^{k-1} P_e(1 - \alpha^i + \alpha^i s), \qquad (3.8)$$

pre $0 < k \leq t$ *a pre tie* s*, pre ktoré má tento vzorec zmysel.*

Dôkaz. Nech $t > 1$ je dané. Potom platí $\mathsf{P}_{X_t}(s) = \mathsf{P}_{X_{t-1}}(1 - \alpha + \alpha s)\, \mathsf{P}_e(s)$, čo je vzťah (3.8) pre $k = 1$. Predpokladajme, že (3.8) platí pre nejaké $0 < k < t, k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{X_t}(s) &= \mathsf{P}_{X_{t-k}}(1 - \alpha^k + \alpha^k s) \prod_{i=0}^{k-1} \mathsf{P}_e(1 - \alpha^i + \alpha^i s) \\
&= \mathsf{P}_{X_{t-(k+1)}}(1 - \alpha + \alpha(1 - \alpha^k + \alpha^k s))\, \mathsf{P}_e(1 - \alpha^k + \alpha^k s) \prod_{i=0}^{k-1} \mathsf{P}_e(1 - \alpha^i + \alpha^i s) \\
&= \mathsf{P}_{X_{t-(k+1)}}(1 - \alpha^{k+1} + \alpha^{k+1} s) \prod_{i=0}^{k} \mathsf{P}_e(1 - \alpha^i + \alpha^i s).
\end{aligned}$$

Vzťah (3.8) teda platí aj pre $k+1$ a matematickou indukciou dostávame tvrdenie z vety 20.

$\square$

Dôsledok. Špeciálne pre $t \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathsf{P}_{X_t}(s) = \mathsf{P}_{X_0}(1 - \alpha^t + \alpha^t s) \prod_{i=0}^{t-1} \mathsf{P}_e(1 - \alpha^i + \alpha^i s). \tag{3.9}$$

Lemma 21. *Platí*

$$X_t = \alpha^k \circ X_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \circ e_{t-i}, \tag{3.10}$$

pre $0 < k \leq t$*, špeciálne*

$$X_t = \alpha^t \circ X_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i \circ e_{t-i}, \tag{3.11}$$

pre $\forall t \geq 0$.

Dôkaz. Podľa vety 1 stačí ukázať rovnosť vytvárajúcich funkcií pravdepodobnosti ľavej a pravej strany. Vďaka vete o vytvárajúcej funkcii pravdepodobnosti konvolúcie náhodných veličín (veta 3) a vďaka bodu (iii) z vety 17 vieme, že pravá strana rovnosti (3.8) je práve vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti náhodnej veličiny $\alpha^k \circ X_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \circ e_{t-i}$.

$\square$

Dôsledok. Ak $\mathsf{E}\,|X_0| < \infty$ a $\mu_e < \infty$, potom

$$\mathsf{E}\,X_t = \alpha^t\,\mathsf{E}\,X_0 + \mu_e \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^k. \tag{3.12}$$

Dôkaz. Rovnosť priamo vyplýva z (3.11) a linearity strednej hodnoty.

$\square$

3.3 INAR(1) s Poissonovým marginálnym rozdelením

Často sa pri používaní modelu INAR(1) používa Poissonovo rozdelenie. Ak budeme predpokladať, že e_t má pre každé $t \in \mathbb{N}_0$ rozdelenie Po(λ) a počiatočné rozdelenie X_0 je tiež Poissonovo rozdelenie, potom každé X_t má taktiež Poissonovo rozdelenie. V prípade, že chceme dosiahnuť slabú stacionaritu procesu, musíme vziať do úvahy rovnicu (3.12).

Veta 22. *Nech $e_t \sim Po(\lambda)$ a počiatočné rozdelenie $X_0 \sim Po(\frac{\lambda}{1-\alpha})$. Potom $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ definovaný v (3.2) je slabo stacionárny náhodný proces, $X_t \sim Po(\frac{\lambda}{1-\alpha})$, pre každé $t \geq 0$ a platí*

$$cov(X_{t+k},X_t) = \frac{\alpha^k \lambda}{1-\alpha}, \quad pre\ k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.13}$$

Dôkaz. V závere prvej kapitoly sme ukázali, že vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti náhodnej veličiny s Poissonovým rozdelením a parametrom λ je $\exp\{\lambda(t-1)\}$. Po dosadení do vzorca (3.9) dosávame

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_{X_t}(s) &= \exp\{\frac{\lambda}{1-\alpha}\alpha^t(s-1)\} \prod_{k=0}^{t-1} \exp\{\lambda\alpha^k(s-1)\} \\ &= \exp\{\lambda(\frac{\alpha^t}{1-\alpha} + \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^k)(s-1)\} \\ &= \exp\{\lambda\frac{\alpha^t + 1 - \alpha^t}{1-\alpha}(s-1)\} \\ &= \exp\{\lambda\frac{1}{1-\alpha}(s-1)\}, \end{aligned}$$

čo jednoznačne udáva rozdelenie $X_t \sim \mathrm{Po}\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)$. Z toho vieme, že $\mathsf{E}\ X_t$ je konštanta, nezávislá na t. Ďalej overme druhú podmienku slabej stacionarity. Využijeme rozklad (3.10) a taktiež vlastnosti operátora binomického riedenia (veta 17).

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X_{t+k},X_t) &= \mathrm{cov}(\alpha^k \circ X_t,X_t) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{cov}\left(\alpha^i \circ e_{t+k-i},X_t\right); \\ \mathrm{cov}(\alpha^k \circ X_t,X_t) &= \mathsf{E}\ \left[\left(\alpha^k \circ X_t\right) X_t\right] - \left[\mathsf{E}\ \alpha^k \circ X_t\right] [\mathsf{E}\ X_t] \\ &= \alpha^k\, \mathsf{E}\ X_t^2 - \alpha^k\, (\mathsf{E}\ X_t)^2 = \alpha^k \,\mathrm{var}\, X_t; \\ \mathrm{cov}\left(\alpha^i \circ e_{t+k-i},X_t\right) &= \mathsf{E}\ \left[\left(\alpha^i \circ e_{t+k-i}\right) X_t\right] - \left[\mathsf{E}\ \alpha^i \circ e_{t+k-i}\right] [\mathsf{E}\ X_t] \\ &= \alpha^i\, \mathsf{E}\,(e_{t+k-i}X_t) - \alpha^i\, \mathsf{E}\ e_{t+k-i}\, \mathsf{E}\ X_t = 0, \end{aligned}$$

pretože X_t nezávisí na $e_{t+1}, \ldots, e_{t+k}$. Z toho teda dostávame

$$\mathrm{cov}(X_{t+k},X_t) = \alpha^k \,\mathrm{var}\, X_t. \tag{3.14}$$

Pretože $\mathrm{var}\, X_t = \frac{\lambda}{1-\alpha}$, dostávame vzorec (3.13).

❑

Poznámka. Vzorec (3.14) platí pre každý proces INAR(1).

Poznámka. Koeficient α má význam korelačného koeficientu medzi X_t a X_{t+1}, pretože podľa vety 22 a (3.14) máme

$$\mathrm{corr}(X_{t+1},X_t) = \frac{\mathrm{cov}(X_{t+1},X_t)}{\sqrt{\mathrm{var}\, X_{t+1}}\sqrt{\mathrm{var}\, X_t}} = \frac{\alpha \,\mathrm{var}\, X_t}{\sqrt{\mathrm{var}\, X_{t+1}}\sqrt{\mathrm{var}\, X_t}} = \alpha.$$

Veta 23. *Nech $t \in \mathbb{N}_0$. Označme κ_k k-ty kumulant X_t. Za platnosti predpokladov vety 22 platí*

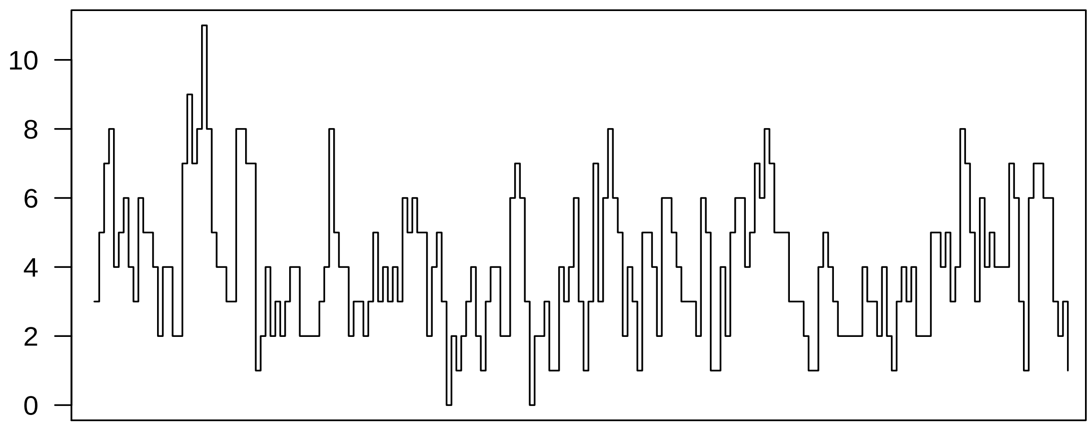
$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\, X_t &= \frac{\lambda}{1-\alpha},\\
\mathsf{E}\, X_t^2 &= \left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^2 + \frac{\lambda}{1-\alpha},\\
\mathsf{E}\, X_t^3 &= \left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^3 + 3\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^2 + \frac{\lambda}{1-\alpha},\\
\mathsf{E}\, X_t^4 &= \left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^4 + 6\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^3 + 7\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^2 + \frac{\lambda}{1-\alpha},\\
\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 &= \frac{\lambda}{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Dôkaz. Označme $\beta := \frac{\lambda}{1-\alpha}$. Vieme, že $\mathsf{P}_{X_t}(s) = \exp\{\beta(s-1)\}$. Potom pre $k \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{R}$ platí $\mathsf{P}_{X_t}^{(k)}(s) = \beta^k\, \mathsf{P}_{X_t}(s)$ a po aplikácii limity $s \to 1_-$ dostávame, že $\mathsf{P}_{X_t}^{(k)}(1_-) = \beta^k$. Aplikáciou lemma 5 dostávame prvé štyri rovnosti. Na výpočet kumulantov použijeme vetu 1.10. Vidíme, že $\kappa_1 = \mathsf{E}\, X_t = \beta$ a vďaka (1.4) dostávame, že aj $\kappa_2 = \operatorname{var} X_t = \beta$.

$$\begin{aligned}
\kappa_3 &= \beta^3 + 3\beta^2 + \beta - 3(\beta^3 + \beta^2) + 2\beta^3 = \beta\\
\kappa_4 &= \beta^4 + 6\beta^3 + 7\beta^2 + \beta - 3\beta^4 - 6\beta^3 - 3\beta^2 - 4\beta^4 - 12\beta^3 - 4\beta^2 + 12\beta^4\\
&\quad + 12\beta^3 - 6\beta^4\\
&= \beta
\end{aligned}$$

❏

Na obrázku 3.1 môžeme vidieť realizáciu takéhoto slabo stacionárneho procesu INAR(1) s parametramim $\lambda = 2$ a $\alpha = 0{,}5$, ktorá bola vytvorená v programe R.



Obrázok 3.1: Realizácia procesu INAR(1) s marginálnym Poissonovým rozdelením a vstupnými parametrami $\lambda = 2$, $\alpha = 0{,}5$ do času $t = 200$.

3.4 INAR(1) s negatívne binomickým marginálnym rozdelením

Ďalej sa budeme zaoberať prípadom, kedy má proces INAR(1) negatívne binomické marginálne rozdelenia.

Veta 24. *Nech $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ je proces INAR(1) definovaný v* (3.2). *Nech $\alpha, p \in (0,1), q = 1 - p, n \in \mathbb{N}$. Uvažujme počiatočné rozdelenie $X_0 \sim NB(n,p)$ a e_t s rozdelením s vytvárajúcou funkciou pravdepodobnosti danou vzorcom*

$$\mathsf{P}_e(s) = \left[\frac{p + \alpha q(1-s)}{1-qs}\right]^n, \quad |s| < \frac{1}{q}.$$

Potom $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ je slabo stacionárny náhodný proces. Naviac $X_t \sim NB(n,p)$ pre každé $t \geq 0$.

Dôkaz. Najskôr matematickou indukciou ukážeme, že $X_t \sim \mathrm{NB}(n,p)$ pre $\forall t \geq 0$. Vieme, že $X_0 \sim \mathrm{NB}(n,p)$. Predpokladajme teda, že toto tvrdenie platí pre $t \geq 0$. Potom s využitím vety 14

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{X_{t+1}}(s) &= \mathsf{P}_{X_t}(1 - \alpha + \alpha s)\,\mathsf{P}_e(s) \\
&= \left[\frac{p}{1 - q(1 - \alpha + \alpha s)}\right]^n \left[\frac{p + \alpha q(1-s)}{1-qs}\right]^n \\
&= \left[\frac{p}{1 - q + q\alpha - q\alpha s} \cdot \frac{p + \alpha q(1-s)}{1-qs}\right]^n \\
&= \left[\frac{p}{p + q\alpha(1-s)} \cdot \frac{p + \alpha q(1-s)}{1-qs}\right]^n \\
&= \left[\frac{p}{1-qs}\right]^n,
\end{aligned}$$

čo vďaka vete 1 jednoznačne určuje rozdelenie $\mathrm{NB}(n,p)$. Z toho vidíme, že je splnená podmienka konštantnosti strednej hodnoty X_t. Keďže ani rozptyl tejto náhodnej veličiny sa v závislosti na t nemení, zo vzorca (3.14) vidíme, že $\mathrm{cov}(X_{t+k}, X_t)$ je funkciou k a nezávisí na t.

❑

Poznámka. Slabú stacionaritu tohto procesu ako prvý odvodil McKenzie (1986), no vo svojej práci neidentifikoval rozdelenie náhodných veličín e_t. Leonenko a kol. (2007) však uvádzajú metódu tvorby tejto náhodnej veličiny vzťahom

$$e_t = \sum_{i=0}^{N} (\alpha^{U_i}) \circ Y_i, \quad \alpha \in (0,1),$$

kde N má Poissonovo rozdelenie s parametrom $-n \log \alpha$, U_i sú rovnomerne rozdelené na intervale (0,1) a Y_i má geometrické rozdelenie s parametrom $\frac{p}{1-p}$.

Veta 25. *Nech $t \in \mathbb{N}_0$. Označme κ_k k-ty kumulant X_t. Za platnosti predpokladov vety 24 platí*

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\, X_t &= \frac{nq}{p}, \\
\mathsf{E}\, X_t^2 &= \frac{nq}{p^2}(1+nq), \\
\mathsf{E}\, X_t^3 &= \frac{q}{p^3}\left[q^2(n+2)(n+1)n + 3qp(n+2)(n+1)n + np^2\right], \\
\mathsf{E}\, X_t^4 &= \frac{q}{p^4}\left[q^3(n+3)(n+2)(n+1)n + 6q^2p(n+2)(n+1)n + 7qp^2(n+1)n + np^3\right], \\
\kappa_1 &= \frac{nq}{p}, \\
\kappa_2 &= \frac{nq}{p^2}, \\
\kappa_3 &= \frac{nq}{p^3}(1+q), \\
\kappa_4 &= \frac{nq}{p^4}(q^2+4q+1).
\end{aligned}$$

Dôkaz. Označme $\mathsf{P}(s) := \mathsf{P}_{X_t}(s) = \frac{p^n}{(1-qs)^n}$ vytvárajúcu funkciu pravdepodobnosti NCNV s negatívne binomickým rozdelením s parametrami n a p. Deriváciou P dostávame

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}'(s) &= p^n(-n)(1-qs)^{-n-1}(-q) = nqp^n(1-qs)^{-n-1} \\
\mathsf{P}'(1_-) &= \frac{nq}{p}, \\
\mathsf{P}''(s) &= n(n+1)q^2p^n(1-qs)^{-n-2} \\
\mathsf{P}''(1_-) &= n(n+1)\frac{q^2}{p^2}, \\
\mathsf{P}'''(s) &= n(n+1)(n+2)q^3p^n(1-qs)^{-n-3} \\
\mathsf{P}'''(1_-) &= n(n+1)(n+2)\frac{q^3}{p^3}, \\
\mathsf{P}^{(4)}(s) &= n(n+1)(n+2)(n+3)q^4p^n(1-qs)^{-n-4} \\
\mathsf{P}^{(4)}(1_-) &= n(n+1)(n+2)(n+3)\frac{q^4}{p^4}.
\end{aligned}$$

Dosadením do vzorcov z lemma 5 dostávame rovnosti pre momenty. Spočítajme teda kumulanty:

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 &= \frac{nq}{p},\\
\kappa_2 &= \frac{nq}{p^2}(1+nq) - \frac{n^2q^2}{p^2} = \frac{nq+n^2q^2-n^2q^2}{p^2} = \frac{nq}{p^2},\\
\kappa_3 &= \frac{1}{p^3}(n^3q^3+3n^2q^3+2nq^3+p^2qn+3n^2pq^2+3nq^2p-3n^2q^2-3n^3q^3+2n^3q^3)\\
&= \frac{1}{p^3}[3n^2q^2(q-1)+3n^2pq^2+nq(2q^2+p^2+3qp)]\\
&= \frac{nq}{p^3}(2q^2+1-2q+q^2+3q-3q^2) = \frac{nq}{p^3}(1+q),\\
\kappa_4 &= \mathsf{E}\, X_t^4 - 3(\mathsf{E}\, X_t^2)^2 - 4\,\mathsf{E}\, X_t\,\mathsf{E}\, X_t^3 + 12(\mathsf{E}\, X_t)^2\,\mathsf{E}\, X_t^2 - 6(\mathsf{E}\, X_t)^4\\
&= \frac{nq}{p^4}\big(-6n^2q^3+3nq^3+6q^3+6n^2q^2-3nq-6n^2q^2p+6nq^2p\\
&\qquad +12q^2p+3nqp^2+7qp^2+p^3\big)\\
&= \frac{nq}{p^4}(q^2+4q+1).
\end{aligned}
$$

❑

Kapitola 4

Binomický AR(1) proces

Definícia 9. *Nech $n \in \mathbb{N}$ je pevné. Nech $p \in (0,1)$ a $\rho \in \Big(\max\{\frac{-p}{1-p}, \frac{-(1-p)}{p}\}, 1\Big)$. Definujme $\beta := p(1-\rho)$ a $\alpha := \beta + \rho$. Potom proces $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ definovaný rekurentným vzťahom*

$$X_0 \sim Bi(n,p), \qquad X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \beta \circ (n - X_{t-1}), \quad t \geq 1, \tag{4.1}$$

kde všetky binomické riedenia prebiehajú nezávisle na sebe a riedenia v čase t nezávisia na $X_0, \dots, X_{t-1}$, sa nazýva binomický autoregresný proces prvého rádu (binomický AR(1) proces).

Poznámka. Podmienka na ρ zabezpečuje, že $\alpha, \beta \in (0,1)$. (Weiß, 2009)

Veta 26. *Binomický AR(1) proces definovaný vzorcom* (4.1) *má markovskú vlastnosť.*

Dôkaz.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X_{t+1} = k \mid X_t = l, X_{t-1} = m_{t-1}, \dots, X_0 = m_0)& \\
&= \mathsf{P}(\alpha \circ X_t + \beta \circ (n - X_t) = k \mid X_t = l, X_{t-1} = m_{t-1}, \dots, X_0 = m_0) \\
&= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{X_t} Y_i + \sum_{j=1}^{n-X_t} Z_j = k \mid X_t = l, X_{t-1} = m_{t-1}, \dots, X_0 = m_0\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Y_i + \sum_{j=1}^{n-l} Z_j = k \mid X_t = l, X_{t-1} = m_{t-1}, \dots, X_0 = m_0\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Y_i + \sum_{j=1}^{n-l} Z_j = k\right) \qquad (4.2) \\
&= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Y_i + \sum_{j=1}^{n-l} Z_j = k \mid X_t = l\right) \qquad (4.3) \\
&= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{X_t} Y_i + \sum_{j=1}^{n-X_t} Z_j = k \mid X_t = l\right) \\
&= \mathsf{P}(X_{t+1} = k \mid X_t = l),
\end{aligned}$$

kde (4.2) a (4.3) platia vďaka nezávislosti $Y_1, \ldots, Y_l$ a $Z_1, \ldots, Z_{n-l}$ od $X_0, \ldots, X_t$. ❑

Binomický AR(1) proces definovaný vzorcom (4.1) sa dá prirodzene interpretovať. Majme n prvkov, ktoré sú buď v stave 0 alebo v stave 1 a ktoré sa správajú navzájom nezávislo. Uvažujme X_{t-1} počet prvkov v stave 1 v čase $t-1$. Potom $\alpha \circ X_{t-1}$ predstavuje počet prvkov, ktoré boli v čase $t-1$ v stave 1 a sú v ňom aj v čase t, čo sa stane s pravdepodobnosťou α. Taktiež $\beta \circ (n - X_{t-1})$ je počet prvkov, ktoré boli v čase $t-1$ v stave 0, ale v čase t už sú v stave 1. Pravdepodobnosť tejto zmeny je β.

Konkrétny príklad použitia uvádza Weiß (2009). Predstavme si počítačovú sieť s n počítačmi, ktoré sú buď používané (stav 1), alebo nepoužívané (stav 0). Počet používaných počítačov X_t v čase t sa skladá z počítačov, ktoré boli používané už v čase $t-1$ a z tých, ktoré niekto začal používať medzi časmi $t-1$ a t. Eventuálne môžeme uvažovať obsadené hotelové izby v hoteli, telefonujúcich pracovníkov v call centre a podobne.

4.1 Pravdepodobnosti prechodu a absolútne rozdelenie

Veta 27. *Pre $t \in \mathbb{N}_0$, $k,l \in \{0, \ldots, n\}$ platí*

$$\mathsf{P}(X_{t+1} = k \mid X_t = l) = \sum_{m=\max\{0,k+l-n\}}^{\min\{k,l\}} \binom{l}{m} \binom{n-l}{k-m} \alpha^m (1-\alpha)^{l-m} \beta^{k-m} (1-\beta)^{n-l+m-k}. \tag{4.4}$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X_{t+1} = k \mid X_t = l) &= \mathsf{P}(\alpha \circ X_t + \beta \circ (n - X_t) = k \mid X_t = l) \\ &= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{X_t} Y_i + \sum_{j=1}^{n-X_t} Z_j = k \mid X_t = l \right) \\ &= \sum_{m=0}^{k} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Y_i = m, \sum_{j=1}^{n-l} Z_j = k - m \mid X_t = l \right) \end{aligned}$$

Y_i sú nezávislé náhodné veličiny s rozdelením $\mathrm{Alt}(\alpha)$, ktoré sú podľa predpokladov z definície nezávislé na X_t a Z_j sú nezávislé náhodné veličiny s rozdelením $\mathrm{Alt}(\beta)$, ktoré sú tiež nezávislé na X_t. Preto sú $\left[\sum_{i=1}^{l} Y_i + \sum_{j=1}^{n-l} Z_j = k\right]$ a $[X_t = l]$ nezávislé javy. Z predpokladu nezávislostí oboch binomických riedení taktiež vyplýva, že môžeme písať

$$\mathsf{P}(X_{t+1} = k \mid X_t = l) = \sum_{m=0}^{k} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Y_i = m \right) \mathsf{P}\left(\sum_{j=1}^{n-l} Z_j = k - m \right). \tag{4.5}$$

$\sum_{i=1}^{l} Y_i$ má rozdelenie Bi(l,α) a preto $\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{l} Y_i = m\right) = 0$ pre každé $m > l$. Podobne $\sum_{j=1}^{n-l} Z_j$ má rozdelenie Bi($n-l, \beta$) a tak stačí uvažovať len tie m, pre ktoré $k - m \leq n - l$, teda $m \geq k + l - n$. Dostávame teda

$$\mathsf{P}(X_{t+1} = k \mid X_t = l) = \sum_{m=\max\{0,k+l-n\}}^{\min\{k,l\}} \binom{l}{m} \alpha^m (1-\alpha)^{l-m} \binom{n-l}{k-m} \beta^{k-m} (1-\beta)^{n-l+m-k}$$

čo je vzorec (4.4).

❑

Poznámka. Keďže vzorec (4.4) nie je závislý na t, binomický AR(1) proces je homogénny markovský reťazec.

Veta 28. *Binomický AR(1) proces ma binomické marginálne rozdelenie s parametrami (n,p), t.j. pre* $\forall t \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{0, \ldots, n\}$ *platí*

$$P(X_t = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{4.6}$$

Dôkaz. Zo vzťahu (4.5) vidíme, že pre $\forall l \in \{1, \ldots, n\}$ podmienená pravdepodobnosť $\mathsf{P}(X_{t+1} = k \mid X_t = l)$ vzniká konvolúciou dvoch nezávislých náhodných veličín $\sum_{i=1}^{l} Y_i$ a $\sum_{j=1}^{n-l} Z_j$ s rozdelením Bi(l,α), respektíve Bi($n-l, \beta$). Vďaka vete 3 teda platí vzťah

$$\mathsf{P}_{X_{t+1}|X_t=l}(s) = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}(X_{t+1} = k \mid X_t = l) s^k = (1-\alpha+\alpha s)^l (1-\beta+\beta s)^{n-l}. \tag{4.7}$$

Z definície binomického AR(1) procesu má X_0 rozdelenie Bi(n,p). Spočítajme teda rozdelenie náhodnej veličiny X_1 prostredníctvom jej vytvárajúcej funkcie pravdepodobnosti. S využitím (4.7) dostávame

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{X_1}(s) &= \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}(X_1 = k) s^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{n} \mathsf{P}(X_1 = k \mid X_0 = l)\, \mathsf{P}(X_0 = l) \right) s^k \\
&= \sum_{l=0}^{n} \mathsf{P}(X_0 = l) \left(\sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}(X_1 = k \mid X_0 = l) s^k \right) \\
&= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} (1-\alpha+\alpha s)^l (1-\beta+\beta s)^{n-l} \\
&= \left[p(1-\alpha+\alpha s) + (1-p)(1-\beta+\beta s) \right]^n .
\end{aligned}$$

Pripomeňme, že $\beta = p(1-\rho)$ a $\alpha = \beta + \rho$. Upravujme ďalej výraz v hranatej zátvorke:

$$\begin{aligned}p(1-&\alpha+\alpha s)+(1-p)(1-\beta+\beta s)\\&=p-p\alpha+p\alpha s+1-p-\beta+\beta p+\beta s-p\beta s\\&=1-\beta-p\alpha+p\beta+s(\beta-p\beta+p\alpha)\\&=1-\beta-p(\alpha-\beta)+s\left(\beta+p(\alpha-\beta)\right)\\&=1-p+p\rho-p\rho+s\left(p-p\rho+p\rho\right)\\&=1-p+sp\end{aligned}$$

Dostávame teda, že $\mathsf{P}_{X_1}(s)=(1-p+ps)^n$, čo je vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti náhodnej veličiny s rozdelením Bi(n,p). Z vety 1 o jednoznačnosti vytvárajúcej funkcie pravdepodobnosti teda vieme, že $X_1\sim$ Bi(n,p).Predpokladajme teda, že $X_{t-1}\sim$ Bi(n,p) pre nejaké $t\in\mathbb{N}$. Potom

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{X_t}(s)&=\sum_{k=0}^{n}\mathsf{P}(X_t=k)s^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{n}\mathsf{P}(X_t=k\mid X_{t-1}=l)\,\mathsf{P}(X_{t-1}=l)\right)s^k\\&=(1-p+ps)^n\end{aligned}$$

a preto platí tvrdenie vety 28.

❑

Zo vzorca (4.4) vidíme, že $\mathsf{P}(X_{t+1}=k\mid X_t=l)>0$ pre všetky $k,l\in\{0,\dots,n\}$. Preto je $\{X_t,t\in\mathbb{N}_0\}$ nerozložiteľný markovský reťazec so všetkými stavmi neperiodickými a teda všetky stavy $0,\dots,n$ sú trvalé a nenulové. Existuje teda stacionárne rozdelenie $\{\pi_j,\ j\in\{0,\dots,n\}\}$ a platí

$$\pi_j=\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}(X_t=j)=\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j},\ j=0,\dots,n.$$

Dostávame, že $\pi_j=\mathsf{P}(X_0=j)$, $j=0,\dots,n$ a teda podľa vety 2.25 v Prášková a Lachout (2012) pre všetky $m\in\mathbb{N}_0$, $k\in\mathbb{N}_0$ a ľubovoľné $i_0,\dots,i_m\in\{0,\dots,n\}$ platí

$$\mathsf{P}(X_0=i_0,X_1=i_1,\dots,X_m=i_m)=\mathsf{P}(X_k=i_0,X_{k+1}=i_1,\dots,X_{k+m}=i_m).$$

Špeciálne teda dvojrozmerné rozdelenia $(X_t,X_{t-k})^\top$ nezávisia na t, z čoho dostávame, že cov(X_t,X_{t-k}) nezávisí na t. Pretože $\mathsf{E}\ X_t=np$ pre všetky t, proces $\{X_t,t\in\mathbb{N}_0\}$ má vlastnosť slabej stacionarity.

4.2 Výpočet momentov a kumulantov

Veta 29. *Nech $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 4$ a $p\in(0,1)$. Nech $\{X_t,t\in\mathbb{N}_0\}$ je binomický AR(1) proces s parametrami n a p. Nech $t\in\mathbb{N}_0$. Označme κ_k k-ty kumulant NCNV X_t.*

Potom platí:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\ X_t &= np,\\
\mathsf{E}\ X_t^2 &= np(np+1-p),\\
\mathsf{E}\ X_t^3 &= np(n^2p^2-3np^2+2p^2+3np-3p+1),\\
\mathsf{E}\ X_t^4 &= np(n^3p^3-6n^2p^3+1np^3-6p^3+6n^2p^2-18np^2+12p^2+7np-7p+1),\\
\kappa_1 &= np,\\
\kappa_2 &= np(1-p),\\
\kappa_3 &= np(1-p)(1-2p),\\
\kappa_4 &= np(-6p^3+12p^2-7p+1).
\end{aligned}$$

Dôkaz. Vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti náhodnej veličiny X_t s binomickým rozdelením je $\mathsf{P}(s) = (1-p+ps)^n$. Jej derivovaním a aplikáciou $s \to 1_-$ dostávame nasledujúce vzťahy:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}^{(k)}(s) &= \frac{n!}{(n-k)!}p^k(1-p+ps)^{n-k}, k = 1,2,3,4\\
\mathsf{P}'(1_-) &= np,\\
\mathsf{P}''(1_-) &= n(n-1)p^2,\\
\mathsf{P}'''(1_-) &= n(n-1)(n-2)p^3,\\
\mathsf{P}^{(4)}(1_-) &= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4.
\end{aligned}$$

Dosadením do lemma 5 dostávame príslušné vzorce pre momenty. Pri počítaní kumulantov využijeme fakt, že ak $Y \sim \mathrm{Alt}(p)$, potom $\mathsf{E}\ Y^k = p$, pre $k \in \mathbb{N}$. Pretože $X_t \sim \mathrm{Bi}(n,p)$ a vďaka vete 3 potom platí $\kappa_k = n\eta_k$, kde η_k je k-ty kumulant Y. Kumulanty $\eta_1, \ldots, \eta_4$ sú

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= p,\\
\eta_2 &= p-p^2 = p(1-p),\\
\eta_3 &= p-3p^2+2p^3 = p(1-p)(1-2p),\\
\eta_4 &= p-3p^2-4p^2+12p^3-6p^4 = p(-6p^3+12p^2-7p+1),
\end{aligned}$$

čo po prenásobení n dáva vzorce, ktoré sme chceli dokázať.

❑

Veta 30. *Pre $t,k \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$cov(X_{t+k},X_t) = \rho^k np(1-p). \tag{4.8}$$

Dôkaz. Pre $k=0$ je $\mathrm{cov}(X_t,X_t) = \mathrm{var}\, X_t = np(1-p)$ a teda dokazovaný vzťah platí. Predpokladajme teda, že (4.8) platí pre nejaké $k \geq 0$. Pretože $\mathsf{E}\ X_t = \mathsf{E}\ X_s$

pre $t,s \in \mathbb{N}_0$, $\beta n = np(1-\rho) = (1-\rho)\,\mathsf{E}\ X_t$ a $\alpha - \beta = \rho$, platí

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_{t+k+1},X_t) &= \mathsf{E}\ X_{t+k+1}X_t - \mathsf{E}\ X_{t+k+1}\,\mathsf{E}\ X_t \\
&= \mathsf{E}\,(\alpha \circ X_{t+k})X_t + \mathsf{E}\,[\beta \circ (n - X_{t+k})]\,X_t - (\mathsf{E}\ X_t)^2 \\
&= \alpha\,\mathsf{E}\ X_{t+k}X_t + \beta n\,\mathsf{E}\ X_t - \beta\,\mathsf{E}\ X_{t+k}X_t - (\mathsf{E}\ X_t)^2 \\
&= \rho\,\mathsf{E}\ X_{t+k}X_t + (1-\rho)\,(\mathsf{E}\ X_t)^2 - (\mathsf{E}\ X_t)^2 \\
&= \rho(\mathsf{E}\ X_{t+k}X_t - \mathsf{E}\ X_{t+k}\,\mathsf{E}\ X_t) \\
&= \rho\operatorname{cov}(X_{t+k},X_t) = \rho^{k+1}np(1-p).
\end{aligned}$$

❑

Poznámka. Z predošlej vety vidíme, že ρ má v binomickom AR(1) procese význam korelačného koeficientu medzi X_{t+1} a X_t.

Príklad. Uvažujme binomický AR(1) proces s parametrami $n = 5, \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}$. Potom teda $\rho = \alpha - \beta = \frac{1}{3}$ a $p = \frac{\beta}{1-\rho} = \frac{1}{2}$. Označme $p_{i,j} = \mathsf{P}(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$. S využitím vzorca (4.4) spočítame

$$\begin{aligned}
p_{0,0} &= \binom{5}{0}(1-\beta)^5 = \frac{32}{243}, \\
p_{0,1} &= \binom{5}{1}\beta(1-\beta)^4 = \frac{80}{243}, \\
&\vdots \\
p_{2,3} &= \binom{2}{2}\alpha^2\binom{3}{1}\beta(1-\beta)^2 + \binom{2}{1}\alpha(1-\alpha)\binom{3}{2}\beta^2(1-\beta) + \binom{2}{0}(1-\alpha)^2\binom{3}{3}\beta^3 \\
&= \frac{73}{243}, \\
&\vdots \\
p_{5,5} &= \binom{5}{5}\alpha^5 = \frac{32}{243}.
\end{aligned}$$

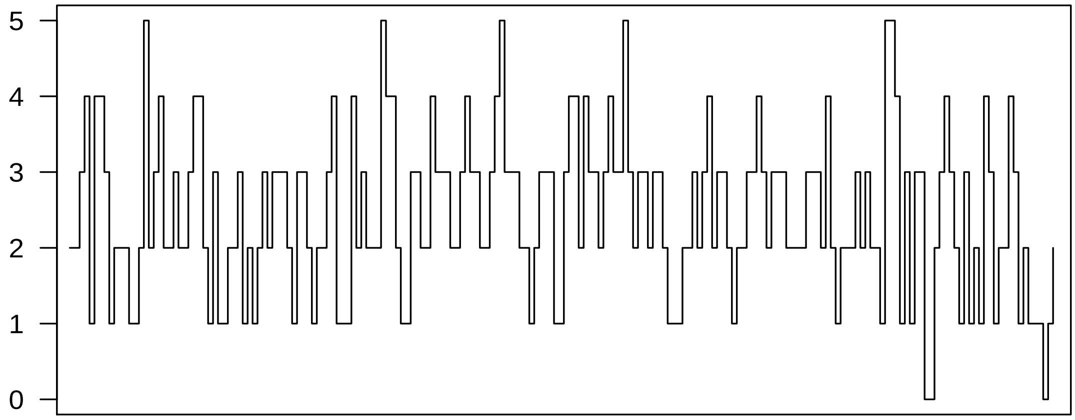
Matica pravdepodobností prechodu je v tvare

$$\frac{1}{243}\begin{pmatrix}
32 & 80 & 80 & 40 & 10 & 1 \\
16 & 64 & 88 & 56 & 17 & 2 \\
8 & 44 & 86 & 73 & 28 & 4 \\
4 & 28 & 73 & 86 & 44 & 8 \\
2 & 17 & 56 & 88 & 64 & 16 \\
1 & 10 & 40 & 80 & 80 & 32
\end{pmatrix}.$$

Pre absolútne pravdepodobnosti v čase t platí

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X_t = k) &= \binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}\\ &= \binom{5}{k}\frac{1}{32}, \quad k = 0,\ldots,5.\end{aligned}$$

Obrázok 4.1 zobrazuje príklad realizácie takéhoto procesu do času $t = 200$.



Obrázok 4.1: Realizácia binomického AR(1) procesu so vstupnými parametrami $n = 5, \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}$ vytvorená v programe R.

4.3 Odhady parametrov p a ρ

Ako plynie z viet 29 a 30, binomický AR(1) proces definovaný v (4.1) s počiatočným rozdelením Bi(n,p) je slabo stacionárny proces so strednou hodnotou np, rozptylom $np(1-p)$ a autokovariančnou funkciou

$$R(k) = \rho^k np(1-p) = \rho^k R(0), \quad k \geq 0.$$

Pri pevnom n môžeme parametre p a ρ odhadnúť momentovou metódou. Predpokladajme, že máme k dispozícií $X_1, \ldots, X_T, T \in \mathbb{N}$ napozorované hodnoty procesu $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$. Nech $\overline{X_T} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} X_i$. Potom

$$\mathsf{E}\,\overline{X_T} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\mathsf{E}\,X_i = np.$$

Parameter p teda môžeme odhadnúť ako riešenie rovnice $\overline{X_T} = np$, takže

$$\widehat{p} = \frac{1}{n}\overline{X_T}.$$

Podobne vieme, že $R(k) = \rho^k R(0)$, teda $\rho = \frac{R(1)}{R(0)}$. Parameter ρ môžeme teda odhadnúť ako

$$\widehat{\rho} = \frac{\widehat{R(1)}}{\widehat{R(0)}},$$

kde

$$\widehat{R(k)} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k}(X_{t+k} - \overline{X_T})(X_t - \overline{X_T}), \quad k = 0{,}1$$

sú výberové kovariancie.

Zaoberajme sa ďalej odhadom $\widehat{p}$.

Veta 31. *Nech $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ je binomický AR(1) proces s počiatočným rozdelením Bi(n,p), $p \in (0{,}1)$. Potom pri pevnom n je odhad $\widehat{p} = \frac{1}{n}\overline{X_T}$ konzistentný odhad parametra p (tzn. $\widehat{p} \to p$ v pravdepodobnosti pre $T \to \infty$).*

Dôkaz. Na to, aby bol odhad $\widehat{p}$ konzistentný odhad parametra p stačí, aby $\mathsf{E}\,\widehat{p} = p$ a $\operatorname{var}\widehat{p} \to 0$ pre $T \to \infty$. Pri odvádzaní odhadu $\widehat{p}$ sme ukázali, že $\mathsf{E}\,\widehat{p} = p$, takže $\widehat{p}$ je nestranný odhad. Počítajme teda $\operatorname{var}\widehat{p} = \operatorname{var}\frac{1}{n}\overline{X_T} = \frac{1}{n^2}\operatorname{var}\overline{X_T}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\overline{X_T} &= \operatorname{var}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \\
&= \frac{1}{T^2}\left[\sum_{t=1}^{T}\operatorname{var}X_t + \sum_{1\le t}\sum_{\neq s \le T}\operatorname{cov}(X_t, X_s)\right]
\end{aligned}$$

Vzhľadom k stacionarite procesu platí $\operatorname{cov}(X_t, X_s) = R(t-s)$ a vďaka symetrii funkcie R môžeme ďalej písať

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\overline{X_T} &= \frac{1}{T^2}\left[TR(0) + 2\sum_{k=1}^{T-1} R(k)(T-k)\right] \\
&= \frac{1}{T^2}\left[TR(0) + 2\sum_{k=1}^{T-1} R(0)\rho^k(T-k)\right] \\
&= \frac{1}{T^2}R(0)\left[T + 2\sum_{k=1}^{T-1} \rho^k(T-k)\right] \\
&= \frac{R(0)}{T} + \frac{2R(0)}{T^2}\sum_{k=1}^{T-1}\rho^k(T-k).
\end{aligned}$$

Prvý člen na pravej strane konverguje k 0 pre $T \to \infty$. Keďže $|\rho| < 1$, druhý výraz odhadneme zhora

$$\begin{aligned}
\frac{2R(0)}{T^2}\sum_{k=1}^{T-1}\rho^k(T-k) &\le \frac{2R(0)}{T^2}\sum_{k=1}^{T-1}|\rho|^k\,|T-k| \\
&\le \frac{2R(0)}{T^2}T\sum_{k=1}^{\infty}|\rho|^k = \frac{2R(0)}{T}\cdot\frac{|\rho|}{1-|\rho|}.
\end{aligned}$$

Tento výraz taktiež ide k 0 pre $T \to \infty$ a teda $\operatorname{var}\overline{X_T} \to 0$, takže aj $\operatorname{var}\widehat{p} \to 0$ pre $T \to \infty$.

❑

Dokázali sme teda, že $\widehat{p}$ je konzistentný odhad parametra p. Odhad parametra ρ vyžaduje zložitejšiu teóriu, ktorou sa v tejto práci už nebudeme zaoberať.

Záver

Účelom tejto práce bolo opísať niektoré modely celočíselných náhodných radov založené na náhodných súčtoch náhodných veličín. V prvej časti sme uviedli všetky potrebné definície a vlastnosti, ktoré sme ďalej využívali v skúmaní daných modelov. Pri jednoduchom procese vetvenia sme ukázali vlastnosti jeho vytvárajúcej funkcie pravdepodobnosti, spočítali sme niekoľko jeho momentov a taktiež sme ukázali súvislosť medzi pravdepodobnosťou vyhynutia procesu a jeho strednou hodnotou. V procese INAR(1) sme odvodili vytvárajúcu funkciu pravdepodobnosti v čase t a ukázali sme vzťah pre výpočet náhodnej veličiny v čase t s pomocou počiatočného rozdelenia a rozdelení e_i, pre $i = 0, \ldots, t-1$. Ďalej sme skúmali vlastnosti procesu INAR(1) s marginálnym Poissonovým a negatívne binomickým rozdelením. V binomickom AR(1) procese sme ukázali jeho stacionaritu, spočítali sme pravdepodobnosti prechodu a momenty a kumulanty až do štvrtého rádu. Na záver sme odvodili odhad parametrov tohto procesu a ukázali sme konzistenciu odhadu $\widehat{p}$.

Zoznam použitej literatúry

AL-OSH, M. A. a ALZAID, A. A. (1987). First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)) process. *Journal of time series analysis*, **8**(3), 261–275.

DA SILVA, M. E. a OLIVEIRA, V. L. (2004). Difference equations for the higher-order moments and cumulants of the INAR(1) model. *Journal of time series analysis*, **25**(3), 317–333.

GUT, A. (2005). *Probability: A Graduate Course*. Druhé opravené vydanie. New York: Springer, New York. ISBN 978-0-387-22833-4.

LEONENKO, N. N., SAVANI, V. a ZHIGLJAVSKY, A. A. (2007). Autoregressive negative binomial processes. **51**, 25–47.

LUKACS, E. (1970). *Characteristic functions*. Druhé vydanie. Griffin London, London. ISBN 80-7378-001-1.

MCKENZIE, E. (1986). Autoregressive moving-average processes with negative binomial and geometric marginal distributions. *Advances in Applied Probability*, **18**(3), 679–705.

PRÁŠKOVÁ, Z. a LACHOUT, P. (2012). *Základy náhodných procesů I.* Druhé vydanie. matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-210-8.

R CORE TEAM (2013). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL `http://www.R-project.org/`.

RESNICK, S. I. (1992). *Adventures in stochastic processes*. Birkhäuser, Boston. ISBN 0-8176-3591-2.

ROMAN, S. (1980). The formula of Faa di Bruno. *The American Mathematical Monthly*, **87**(10), 807.

WEISS, C. H. (2009). Monitoring correlated processes with binomial marginals. *Journal of Applied Statistics*, **36**(4), 399–414.

Zoznam obrázkov